四端子定数のまとめ

今回は、四端子定数の概要と、各頻出回路における四端子定数について導出する。

四端子回路の概要

図 1 のように、入力端子および出力端子を各 2 端子備えた回路網を四端子回路という。

（本文書では、入力端子を送電端（添字s，Sending end）、出力端子を受電端（添字r，Receiving end）と呼ぶこととする）

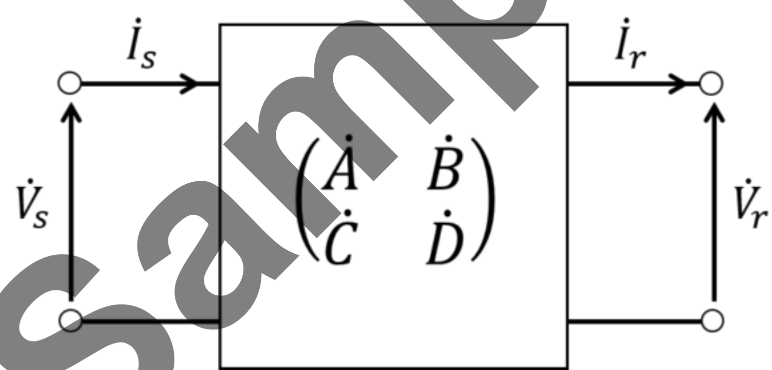

図 1　四端子回路

図 1 の四端子回路において、送電端電圧・電流をそれぞれ$\dot{V}_\mathrm{s}$，$\dot{I}_\mathrm{s}$および受電端電圧・電流をそれぞれ$\dot{V}_\mathrm{r}$，$\dot{I}_\mathrm{r}$とすると、下記の式が成り立つ。

$$\begin{cases} \dot{V}_\mathrm{s} = \dot{A}\dot{V}_\mathrm{r} + \dot{B}\dot{I}_\mathrm{r} & \cdots (1.1) \\ \dot{I}_\mathrm{s} = \dot{C}\dot{V}_\mathrm{r} + \dot{D}\dot{I}_\mathrm{r} & \cdots (1.2) \end{cases}$$

(1.1)および(1.2)を行列表記にすると、

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_{\mathrm{s}} \\ \dot{I}_{\mathrm{s}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{A} & \dot{B} \\ \dot{C} & \dot{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{V}_{\mathrm{r}} \\ \dot{I}_{\mathrm{r}} \end{pmatrix} \cdots (1)$$

(1)式において、電圧・電流の相互関係を表す$\dot{A}$, $\dot{B}$, $\dot{C}$, $\dot{D}$を四端子定数という。

本文書では、電力系統の模擬によく用いられる回路において、四端子定数を導出する。

頻出回路の四端子定数

T 形等価回路

図 2 の四端子回路は T 形等価回路と呼ばれる。

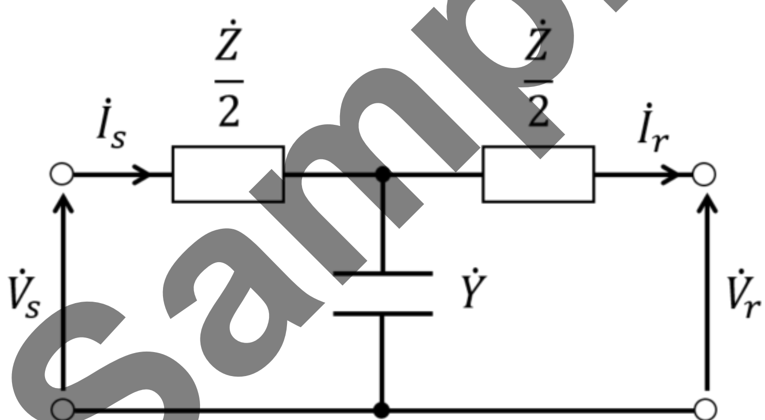

図 2　T 形等価回路

図 2 の T 形等価回路の四端子定数を導出する。

まず、受電端開放時、$\dot{I}_{\mathrm{r}} = 0$であるから、図 2 の回路における$\dot{V}_{\mathrm{s}}$と$\dot{V}_{\mathrm{r}}$の関係は、

$$\dot{V}_{\mathrm{r}} = \frac{\frac{1}{\dot{Y}}}{\frac{\dot{Z}}{2} + \frac{1}{\dot{Y}}} \dot{V}_{\mathrm{s}}$$

上式右辺の分母および分子に$2\dot{Y}$をかけると、

$$\dot{V}_{\mathrm{r}} = \frac{2}{2+\dot{Z}\dot{Y}}\dot{V}_{\mathrm{s}}$$

$$\therefore \dot{A} = \frac{\dot{V}_{\mathrm{s}}}{\dot{V}_{\mathrm{r}}} = 1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{2}$$

同様の条件で、図 2 の回路における$\dot{I}_{\mathrm{s}}$と$\dot{V}_{\mathrm{r}}$の関係は、

$$\dot{I}_{\mathrm{s}} = \dot{Y}\dot{V}_{\mathrm{r}}$$

$$\therefore \dot{C} = \frac{\dot{I}_{\mathrm{s}}}{\dot{V}_{\mathrm{r}}} = \dot{Y}$$

次に、受電端短絡時、$\dot{V}_{\mathrm{r}} = 0$であるから、図 2 の回路における$\dot{I}_{\mathrm{s}}$と$\dot{I}_{\mathrm{r}}$の関係は、

$$\dot{I}_{\mathrm{r}} = \frac{\frac{1}{\dot{Y}}}{\frac{\dot{Z}}{2}+\frac{1}{\dot{Y}}}\dot{I}_{\mathrm{s}}$$

上式右辺の分母および分子に$2\dot{Y}$をかけると、

$$\dot{I}_{\mathrm{r}} = \frac{2}{2+\dot{Z}\dot{Y}}\dot{I}_{\mathrm{s}}$$

$$\therefore \dot{D} = \frac{\dot{I}_{\mathrm{s}}}{\dot{I}_{\mathrm{r}}}$$

$$= 1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{2} (= \dot{A})$$

また、同条件下において、$\dot{V}_{\mathrm{s}}$を$\dot{I}_{\mathrm{s}}$および$\dot{I}_{\mathrm{r}}$を用いて表すと、

$$\dot{V}_{\mathrm{s}} = \frac{\dot{Z}}{2}\dot{I}_{\mathrm{s}} + \frac{\dot{Z}}{2}\dot{I}_{\mathrm{r}}$$

上式に$\dot{I}_{\mathrm{s}} = \dot{D}\dot{I}_{\mathrm{r}} = \left(1+\frac{\dot{Z}\dot{Y}}{2}\right)\dot{I}_{\mathrm{r}}$を代入すれば、

$$\dot{V}_{\mathrm{s}} = \left\{\frac{\dot{Z}}{2}\left(1+\frac{\dot{Z}\dot{Y}}{2}\right) + \frac{\dot{Z}}{2}\right\}\dot{I}_{\mathrm{r}}$$

$$\therefore \dot{B} = \frac{\dot{V}_{\mathrm{s}}}{\dot{I}_{\mathrm{r}}}$$

$$= \frac{\dot{Z}}{2}\left(2 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{2}\right)$$

$$= \dot{Z}\left(1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{4}\right)$$

以上より、T 形等価回路の四端子定数は、

$$\begin{pmatrix} \dot{A} & \dot{B} \\ \dot{C} & \dot{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\dot{Z}\dot{Y}}{2} & \dot{Z}\left(1 + \dfrac{\dot{Z}\dot{Y}}{4}\right) \\ \dot{Y} & 1 + \dfrac{\dot{Z}\dot{Y}}{2} \end{pmatrix}$$

アドミタンス回路

図 3 は回路にアドミタンス$\dot{Y}$しか接続されていないシンプルな回路となる。

同図の回路は、図 2 の T 形等価回路の左右の$\frac{\dot{Z}}{2}$が接続されない場合（図では点線としている）と考えることができる。

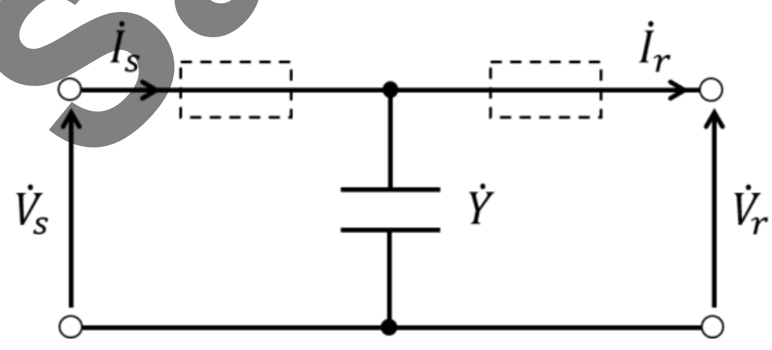

図 3　アドミタンス回路

したがって、アドミタンス回路の四端子定数は、T 形等価回路の四端子定数に$\dot{Z} = 0$を代入すればよく、

$$\begin{pmatrix} \dot{A} & \dot{B} \\ \dot{C} & \dot{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dot{Y} & 1 \end{pmatrix}$$

π形等価回路

図 4 の四端子回路はπ形等価回路と呼ばれる。

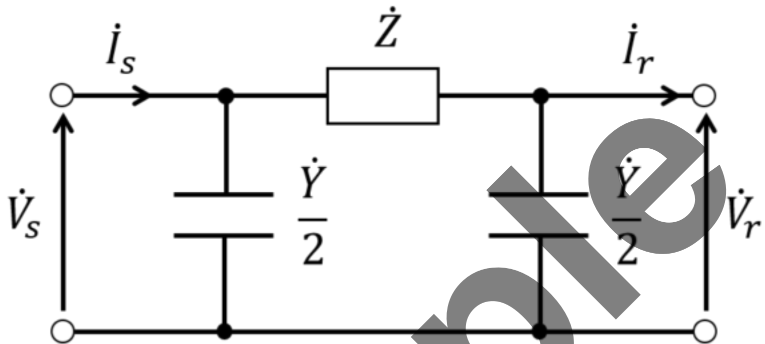

図 4　π形等価回路

図 4 のπ形等価回路の四端子定数を導出する。

まず、受電端開放時、$\dot{I}_{\mathrm{r}} = 0$であるから、図 4 の回路における$\dot{V}_{\mathrm{s}}$と$\dot{V}_{\mathrm{r}}$の関係は、

$$\dot{V}_{\mathrm{r}} = \frac{\frac{2}{\dot{Y}}}{\dot{Z} + \frac{2}{\dot{Y}}} \dot{V}_{\mathrm{s}}$$

上式右辺の分母および分子に$\dot{Y}$をかけると、

$$\dot{V}_{\mathrm{r}} = \frac{2}{2 + \dot{Z}\dot{Y}} \dot{V}_{\mathrm{s}}$$

$$\therefore \dot{A} = \frac{\dot{V}_{\mathrm{s}}}{\dot{V}_{\mathrm{r}}}$$

$$= 1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{2}$$

また、同条件下において、$\dot{I}_{\mathrm{s}}$を$\dot{V}_{\mathrm{s}}$および$\dot{V}_{\mathrm{r}}$で表すと、

$$\dot{I}_{\mathrm{s}} = \frac{\dot{Y}}{2}\dot{V}_{\mathrm{s}} + \frac{\dot{V}_{\mathrm{s}} - \dot{V}_{\mathrm{r}}}{\dot{Z}}$$

$$= \left(\frac{\dot{Y}}{2} + \frac{1}{\dot{Z}}\right)\dot{V}_{\mathrm{s}} - \frac{1}{\dot{Z}}\dot{V}_{\mathrm{r}}$$

上式に$\dot{V}_s = \dot{A}\dot{V}_r = \left(1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{2}\right)\dot{V}_r$を代入すれば、

$$\dot{I}_{\mathrm{s}} = \left\{\left(\frac{\dot{Y}}{2} + \frac{1}{\dot{Z}}\right)\left(1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{2}\right) - \frac{1}{\dot{Z}}\right\}\dot{V}_{\mathrm{r}}$$

$$= \dot{Y}\left(1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{4}\right)\dot{V}_{\mathrm{r}}$$

$$\therefore \dot{C} = \frac{\dot{I}_{\mathrm{s}}}{\dot{V}_{\mathrm{r}}} = \dot{Y}\left(1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{4}\right)$$

次に、受電端短絡時、$\dot{V}_{\mathrm{r}} = 0$であるから、図 4 の回路における$\dot{I}_{\mathrm{s}}$と$\dot{I}_{\mathrm{r}}$の関係は、

$$\dot{I}_{\mathrm{r}} = \frac{\frac{2}{\dot{Y}}}{\dot{Z} + \frac{2}{\dot{Y}}}\dot{I}_{\mathrm{s}}$$

上式右辺の分母および分子に$\dot{Y}$をかけると、

$$\dot{I}_{\mathrm{r}} = \frac{2}{2 + \dot{Z}\dot{Y}}\dot{I}_{\mathrm{s}}$$

$$\therefore \dot{D} = \frac{\dot{I}_{\mathrm{s}}}{\dot{I}_{\mathrm{r}}}$$

$$= 1 + \frac{\dot{Z}\dot{Y}}{2}(= \dot{A})$$

同様の条件で、図 4 の回路における$\dot{V}_{\mathrm{s}}$と$\dot{I}_{\mathrm{r}}$の関係は、

$$\dot{V}_{\mathrm{s}} = \dot{Z}\dot{I}_{\mathrm{r}}$$

$$\therefore \dot{B} = \frac{\dot{V}_{\mathrm{s}}}{\dot{I}_{\mathrm{r}}} = \dot{Z}$$

以上より、π形等価回路の四端子定数は、

$$\begin{pmatrix} \dot{A} & \dot{B} \\ \dot{C} & \dot{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\dot{Z}\dot{Y}}{2} & \dot{Z} \\ \dot{Z}\left(1 + \dfrac{\dot{Z}\dot{Y}}{4}\right) & 1 + \dfrac{\dot{Z}\dot{Y}}{2} \end{pmatrix}$$

インピーダンス回路

図 5 の回路はインピーダンス$\dot{Z}$しか接続されていない構成をしている。

同図の回路は、図 4 の$\frac{\dot{Y}}{2}$が接続されない場合（図では点線としている）と考えることができる。

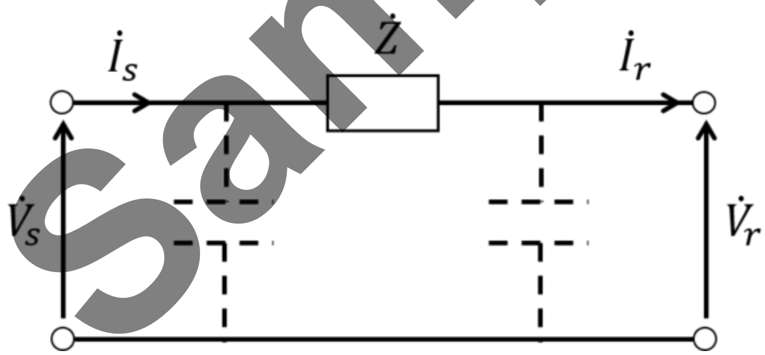

図 5　インピーダンス回路

したがって、インピーダンス回路の四端子定数は、π形等価回路の四端子定数に$\dot{Y} = 0$を代入すればよく、

$$\begin{pmatrix} \dot{A} & \dot{B} \\ \dot{C} & \dot{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dot{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

変圧器

標準パターン（一次側換算）

変圧器の四端子定数を考える場合、図 6 の$1:n$の理想変圧器と漏れリアクタンスXが直列接続された回路を用いる。

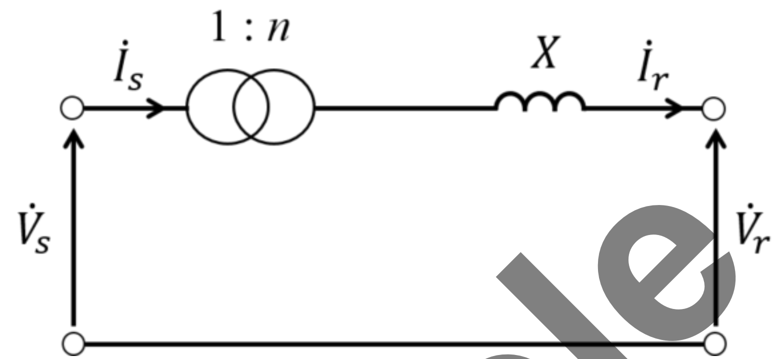

図 6　変圧器標準パターン（一次側換算）

（以下の計算は、すべて一次側換算で考える）

まず、受電端開放時、$\dot{I}_{\mathrm{r}} = 0$であるから、図 6 の回路における$\dot{V}_s$と$\dot{V}_r$の関係は、

$$\dot{V}_{\mathrm{s}} = \frac{1}{n}\dot{V}_{\mathrm{r}}$$

$$\therefore \dot{A} = \frac{\dot{V}_{\mathrm{s}}}{\dot{V}_{\mathrm{r}}} = \frac{1}{n}$$

また、同条件下において、$\dot{I}_{\mathrm{s}}$は、

$$\dot{I}_{\mathrm{s}} = 0$$

$$\therefore \dot{C} = 0$$

次に、受電端短絡時、$\dot{V}_{\mathrm{r}} = 0$であるから、図 6 の回路における$\dot{V}_{\mathrm{s}}$と$\dot{I}_{\mathrm{r}}$の関係は、

$$\dot{V}_{\mathrm{s}} = n\dot{I}_{\mathrm{r}} \cdot \frac{jX}{n^2}$$

$$\therefore \dot{B} = \frac{\dot{V}_{\mathrm{s}}}{\dot{I}_{\mathrm{r}}} = \frac{jX}{n}$$

また、同条件下において、$\dot{I}_{\mathrm{s}}$は、

$$\therefore \dot{I}_s = n\dot{I}_r$$

$$\dot{D} = n$$

以上より、図 6 の変圧器の四端子定数は、

$$\begin{pmatrix} \dot{A} & \dot{B} \\ \dot{C} & \dot{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{jX}{n} \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

特殊パターン（一次側換算）

平成 19 年度電験一種二次試験「電力・管理」問 3 において、図 7 のように、理想変圧器が漏れリアクタンスXの右側に接続されているパターンで出題されている。

（知りうる限りこの時一回のみ。その他の年度は前述の標準パターンで出題されている）

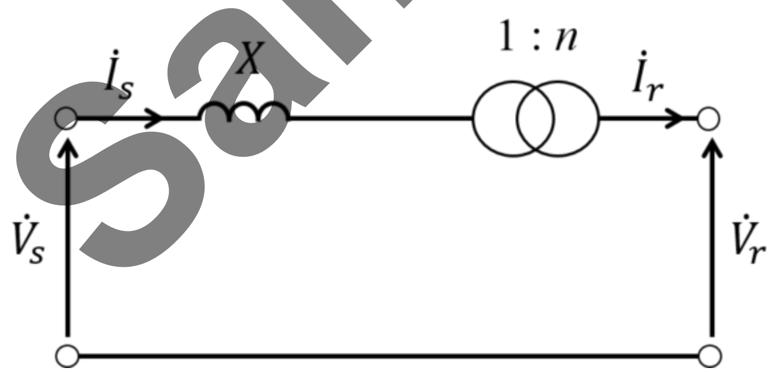

図 7　変圧器特殊パターン（一次側換算）

図 7 の場合、一次側に漏れリアクタンスXがあるため、そもそも回路定数を換算する必要がない。

したがって、前述の標準パターンにおける$\dot{B}$を求める場合の式が異なってきて、

$$\dot{V}_{\mathrm{s}} = n\dot{I}_{\mathrm{r}} \cdot jX$$

$$\dot{B}=\frac{\dot{V}_{\mathrm{s}}}{\dot{I}_{\mathrm{r}}}=jnX$$

残りの定数の求め方は標準パターンと同じである。

以上より、図 7 の変圧器（理想変圧器が漏れリアクタンスXの右側の場合）の四端子定数は、

$$\begin{pmatrix}\dot{A} & \dot{B}\\ \dot{C} & \dot{D}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{n} & jnX\\ 0 & n\end{pmatrix}$$

分布定数回路

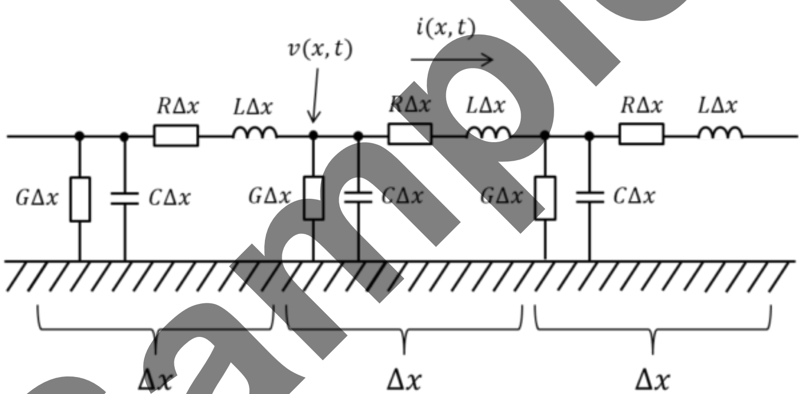

図 8　分布定数回路

図 8 の分布定数回路における四端子定数は、

$$\begin{pmatrix}\dot{A} & \dot{B}\\ \dot{C} & \dot{D}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh\dot{\gamma}l & \dot{Z}_0\sinh\dot{\gamma}l\\ \dfrac{1}{\dot{Z}_0}\sinh\dot{\gamma}l & \cosh\dot{\gamma}l\end{pmatrix}$$

ただし、

$$\dot{\gamma}=\sqrt{(j\omega L+R)(j\omega C+G)}$$
$$\dot{Z}_0=\sqrt{\frac{j\omega L+R}{j\omega C+G}}$$